

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ FEN FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ
2023-2024 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 468 FONKSİYONEL ANALİZ QUIZ SORULARI

- 1) $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = |e^x - e^y|$ ile tanımlı d fonksiyonu veriliyor. Buna göre
- d fonksiyonunun \mathbb{R} üzerinde bir metrik olduğunu gösteriniz. (20 puan)
 - d metriğine göre 0 merkezli 1 yarıçaplı $B_d(0,1)$ açık yuvarını bulunuz. (15 puan)
 - d metriğine göre 1 reel sayısının $[-1,0]$ kapalı aralığına olan uzaklığını (yani $d(1,[-1,0])$ değerini) bulunuz. (15 puan)
- 2) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq 1\}$ kümesi veriliyor. \mathbb{R}^2 üzerinde her $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ile tanımlı alışılmış d_2 metriğine göre
- A kümesinin açık küme ve kapalı küme olup olmadığını belirleyiniz. (20 puan)
 - A kümesinin iç noktaları kümesini (yani A° kümesini) bulunuz. (15 puan)
 - A kümesinin dışını (yani $dışA$ kümesini) bulunuz. (15 puan)

Not: Süre 50 dakikadır.

Başarılar...
Doç. Dr. Nilay DEĞİRMEN

1-) a) $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, d(x,y) = |e^x - e^y|$

i) $d(x,y) \geq 0, \forall x,y \in \mathbb{R}$

ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |e^x - e^y| = 0 \Leftrightarrow e^x - e^y = 0 \Leftrightarrow e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$

iii) $d(x,y) = |e^x - e^y| = |e^y - e^x| = d(y,x), \forall x,y \in \mathbb{R}$

iv) $d(x,y) = |e^x - e^y|$

$$= |(e^x - e^z) + (e^z - e^y)|$$

$$\leq |e^x - e^z| + |e^z - e^y|$$

$$= d(x,z) + d(z,y), \forall x,y,z \in \mathbb{R}$$

olduğundan d, \mathbb{R} üzerinde bir metriktir.

b) $B_d(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : d(0,x) < 1\}$

$$= \{x \in \mathbb{R} : |e^0 - e^x| < 1\} = (-\infty, \ln 2) \text{ açık aralığı}$$

$$|1 - e^x| < 1 \Rightarrow -1 < 1 - e^x < 1 \Rightarrow -2 < -e^x < 0 \Rightarrow 0 < e^x < 2$$

$$\Rightarrow -\infty < x < \ln 2$$

c) $d(1, [-1,0]) = \inf \{d(1,x) : x \in [-1,0]\}$

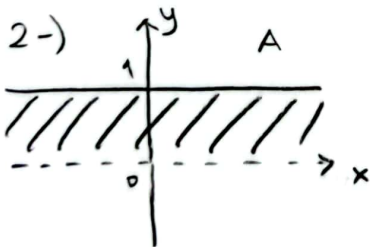
$$= \inf \{|e^1 - e^x| : x \in [-1,0]\}$$

$$= \inf \{|e - e^x| : x \in [-1,0]\} = e - 1$$

$$-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{e} \leq e^x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -e^x \leq -\frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow e - 1 \leq e - e^x \leq e - \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow e - 1 \leq |e - e^x| \leq e - \frac{1}{e}$$



a) $(0,1) \in A$ için $B((0,1),r) \subset A$ olacak şekilde $r > 0$ yok. Dolayısıyla A açık küme değildir.

$(0,0) \in A^c$ için $B((0,0),r) \subset A^c$ olacak şekilde $r > 0$ yok. Dolayısıyla A^c açık değil, A da kapalı değildir.

b) $y = 1$ doğrusu üzerindeki hiçbir nokta iç nokta olamaz.

$\epsilon < 1$ için $\epsilon = \min\{y, 1-y\}$ seçilirse

$B((x,y), \epsilon) \subset A$ olur. Dolayısıyla $A^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1\}$ dir.

c) dış $A = (A^c)^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$ dir.

